23 Soit n un entier naturel et m un entier non nul.

On pose,

$$I(n,m)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt \text{ et } I(n,0)=\frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I(n,m)=\frac{m}{n+1}I(n+1,m-1)$.

2. Montrer que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m)!}I(n+m,0)$.

Montrer alors que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

24 Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}, \\ u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2},\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que (u_n) est convergente et de donner une valeur approchée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)|\le\frac{e}{4}$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n\le 1$.

3. a. Justifier l'égalité $f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(v)dv$.

b. En déduire que pour tout entier n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{e}{4}|u_n-\alpha|$.

c. Montrer alors que pour tout entier n, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

25 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^x$.

26 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.

3. Comparer x^2 et 2^x.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

En déduire le nombre de solutions de l'équation $3^x+4^x=5^x$.